Chapitre 3:

Principe fondamental de la statique

Plan

- Introduction
- Théorème fondamental de la statique
- Méthodes de résolution d’un problème de statique
- Exemple d’Application

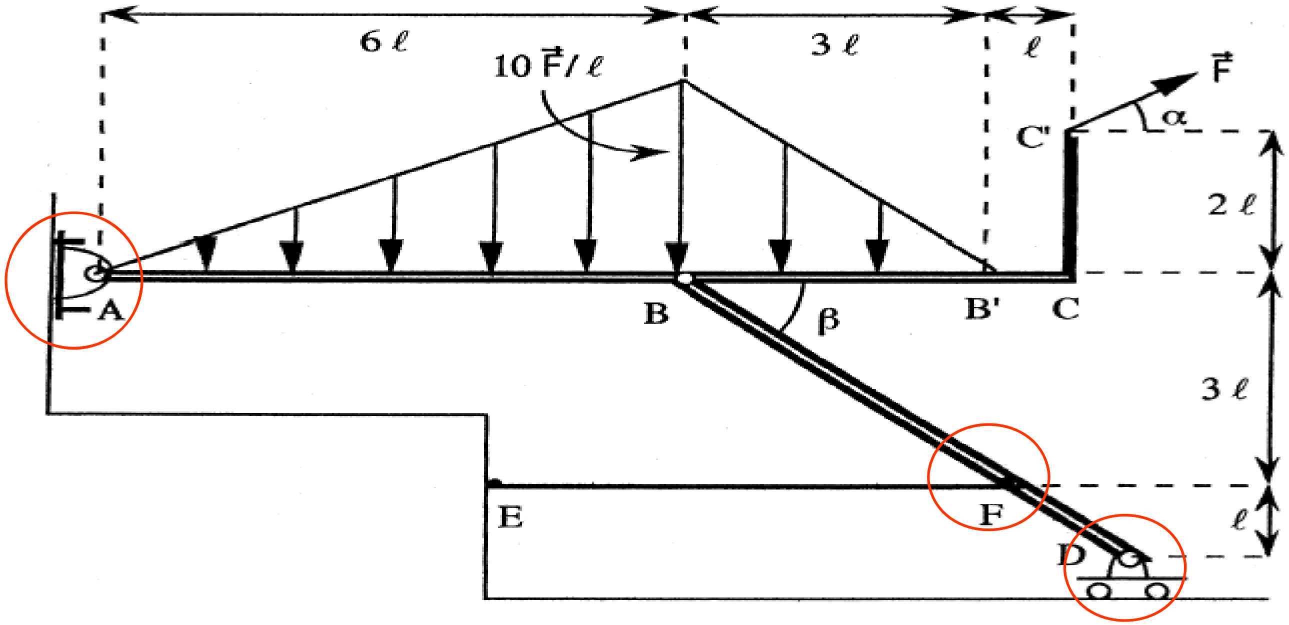
I- Introduction

Le but de ce chapitre est de savoir résoudre un problème d’équilibre statique.

1) Statique

- ✓ C’est la partie de la mécanique qui concerne l’étude des efforts en absence de mouvement.
- ✓ La statique s’intéressera au calcul des efforts aux liaisons.

exemple



2) Equilibre

Un système matériel (Σ) est dit au repos si durant une intervalle du temps aucun de ses paramètres de position ne varie. Le problème correspondant est un problème d’équilibre.

II- Théorème fondamental de la statique

1) Enoncé

Si un système matériel (Σ) est en équilibre dans un espace galiléen, le torseur des efforts extérieurs appliqué à (Σ) est nul .

$$\boxed{\left[\mathscr{F}_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}\right]=[0]}$$

Ce théorème fondamental de la statique qui exprime la nullité du torseur des efforts extérieurs appliqués à Σ conduit à la formulation de deux théorèmes, dits **théorèmes généraux de la statique**, exprimant la nullité des éléments de réduction en un point du torseur des efforts extérieurs appliqués à Σ .

2) Théorèmes généraux de la statique

a) Théorème de la résultante statique

La résultante des efforts extérieurs appliqués à Σ est nulle :

$$\vec{R}\,(\mathscr{F}_{\bar{\Sigma}\to\Sigma})=\vec{0}$$

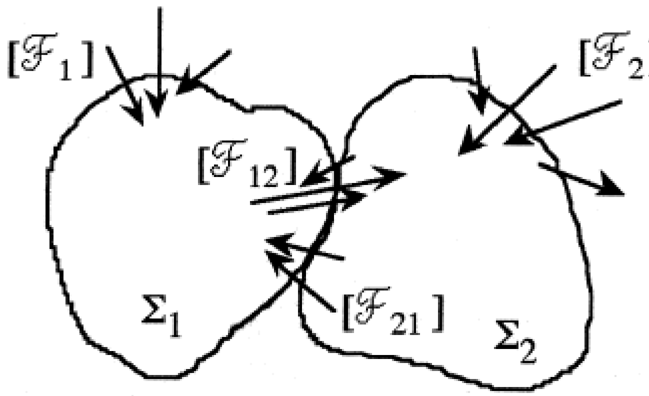
b) Théorème du moment statique

Le moment en un point A des efforts extérieurs appliqués à Σ est nul :

$$\vec{M}(A, \mathcal{F}_{\bar{\Sigma} \to \Sigma}) = \vec{0}$$

3) Théorème des inter-efforts

Si (Σ_1) et (Σ_2) sont deux systèmes matériels sans partie matérielle commune, le torseur des efforts exercés par (Σ_1) sur (Σ_2) est opposé au torseur des efforts exercés par (Σ_2) sur (Σ_1).



$$[\mathcal{F}_{21}] + [\mathcal{F}_{12}] = [0]$$

III- Méthode de résolution d'un problème de statique

1) Équations provenant des théorème généraux

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé galiléen par rapport auquel un système (Σ) est en équilibre.

Le théorème de la résultante $\vec{R}(\mathcal{F}_{\bar{\Sigma} \to \Sigma}) = \vec{0}$ fournit trois équations scalaires par projection sur la base du repère, soit, avec des notations évidentes :

$$F_x = 0 \quad , \quad F_y = 0 \quad , \quad F_z = 0$$

Le théorème du moment : $\vec{M}(A, \mathcal{F}_{\bar{\Sigma} \to \Sigma}) = \vec{0}$ en fournit également trois :

$$M_x = 0 \quad , \quad M_y = 0 \quad , \quad M_z = 0$$

6 équations

---

problème plan Les forces appliquées à ce solide sont dans le plan les couples appliqués sont portés par $\vec{z}$

Le théorème de la résultante fournit deux équations scalaires : $F_x = 0 \quad , \quad F_y = 0$

Le théorème du moment n'en fournit qu'une : $M_z = 0$

3 équations

2) Problème bien posé

On dit qu'un problème est bien posé lorsque l'on peut écrire autant d'équations scalaires qu'il y a d'inconnues, ces équations étant évidemment indépendantes.

les inconnues d'un problème de statique sont les composantes sur la base du repère des efforts de liaison

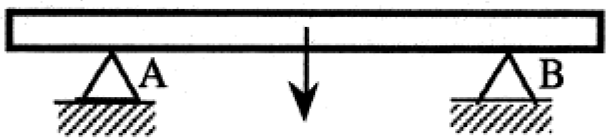
3) Isostatisme – Hyperstatisme - Hypostatisme

a) Degré de liaison

C'est le nombre d'inconnues sthéniques engendrés par une liaison. Exemple : encastrement (6 en 3D et 3 en 2D).

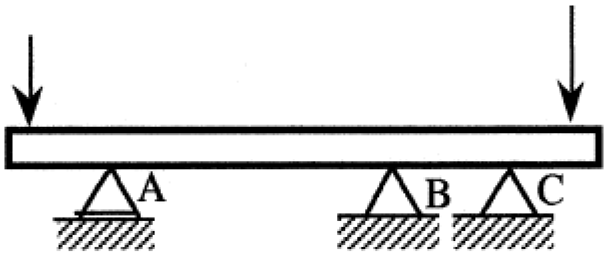
b) Système isostatique

Un système **isostatique** est un système en équilibre dont la suppression d'un degré de liaison entraîne un mouvement , donc la rupture de l'équilibre.



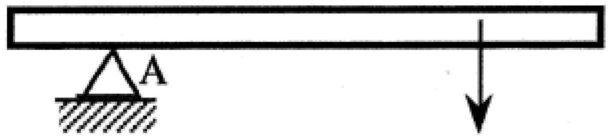
c) Système hyperstatique

Un système **hyperstatique** est un système en équilibre dont la suppression d'un degré de liaison n'entraîne pas de mouvement , donc pas de rupture d'équilibre.



d) Système hypostatique

Un système **hypostatique** est un système à qui il manque un ou plusieurs degrés de liaison pour être en équilibre.



4) Démarche de résolution d'un problème de statique

- On dénombre et dénomme les inconnues sthéniques.

- On isole le système matériel Σ et on lui applique les théorèmes généraux de la statique.

  Deux cas peuvent se présenter :

  a- On peut en déduire toutes les inconnues alors le problème est résolu.

  b- On ne peut pas en déduire toutes les inconnues alors on isole un sous-système de Σ et on lui applique également les théorèmes généraux en veillant à ne pas introduire plus de nouvelles inconnues sthéniques que de nouvelles équations.

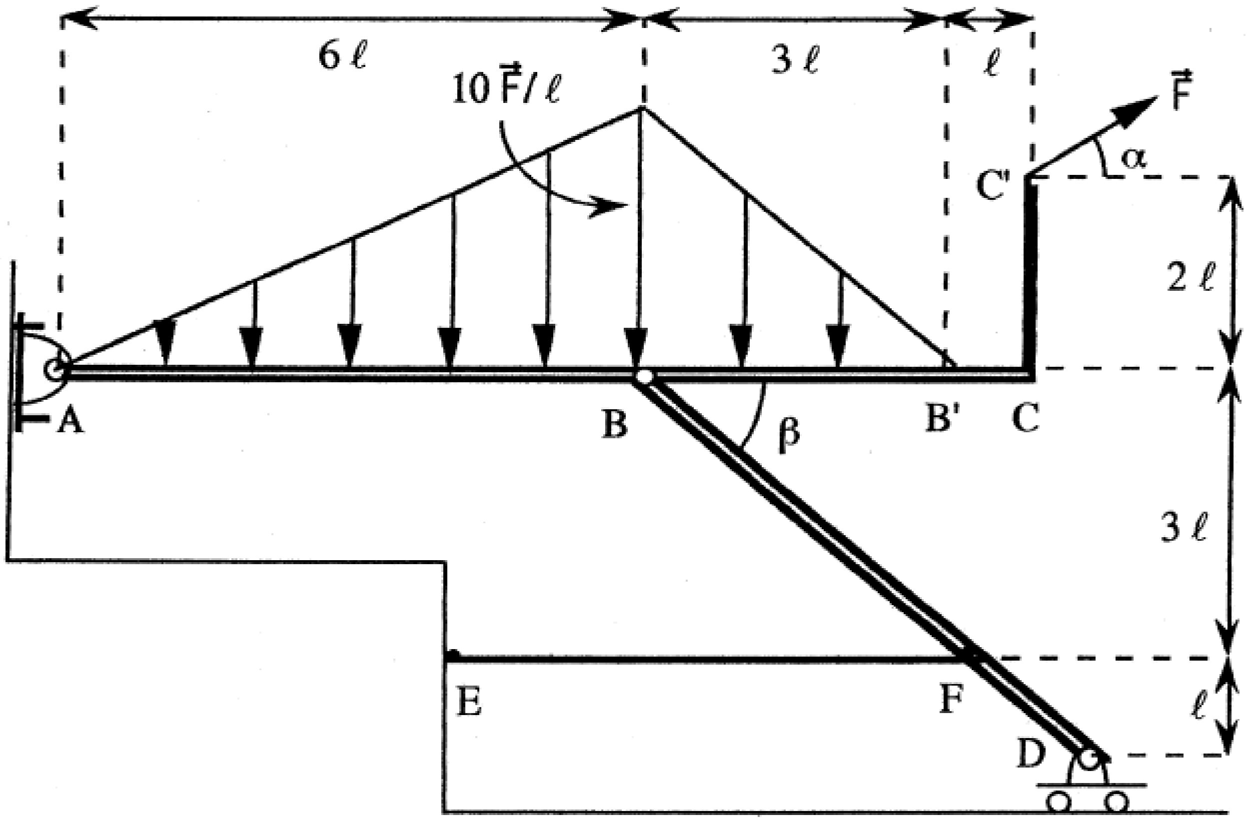
  Au besoin on recommence l'opération avec un autre sous-système de Σ.

– S'il n'est pas possible de déterminer les inconnues à l'aide des seuls théorèmes généraux, il faut faire appel à d'autres équations rendant compte de la nature des contacts entre deux solides du système comme le contact sans frottement

IV- Exemple d'application *(Exo 1 du TD5)*

La figure ci-dessous représente un assemblage de poutres dont on néglige les poids propres vis à vis du chargement.

les liaisons en A, B et D sont des pivots parfaits. L'appui en A est fixe, l'appui en D est mobile. La poutre BD est retenue par un câble inextensible EF. Le chargement est constitué d'une force ponctuelle en C' et d'une charge répartie sur ABB'.



1- Dessiner uniquement l'ensemble des deux poutres ACC' et BD. Indiquer les composantes de l' effort donné en C' et celles des efforts en G_1 et G_2 (à positionner) remplaçant la répartition du chargement respectivement sur AB et BB'. Faire figurer en leur donnant un nom les composantes des efforts inconnus en A, D et F

2- En appliquant le théorème fondamental de la statique, déterminer les efforts de liaison en A et D ainsi que la tension du câble

3- Donner les valeurs de toutes les composantes d'effort sachant que F = 20 N, $\alpha = 30°$ et $\beta = 40°$

Vérifier les résultats en reportant ces valeurs sur la figure.

Solution

R 1 On remplace le chargement réparti sur AB par la force :

$\vec{F}_1 = -F_1 \vec{y}$ avec $F_1 = \frac{1}{2} \frac{10\,F}{\ell} 6\,\ell = 30\,F$

Cette force est appliquée au point G_1 tel que $OG_1 = \frac{2}{3} AB = 4\,\ell$

On remplace le chargement réparti sur BB' par la force :

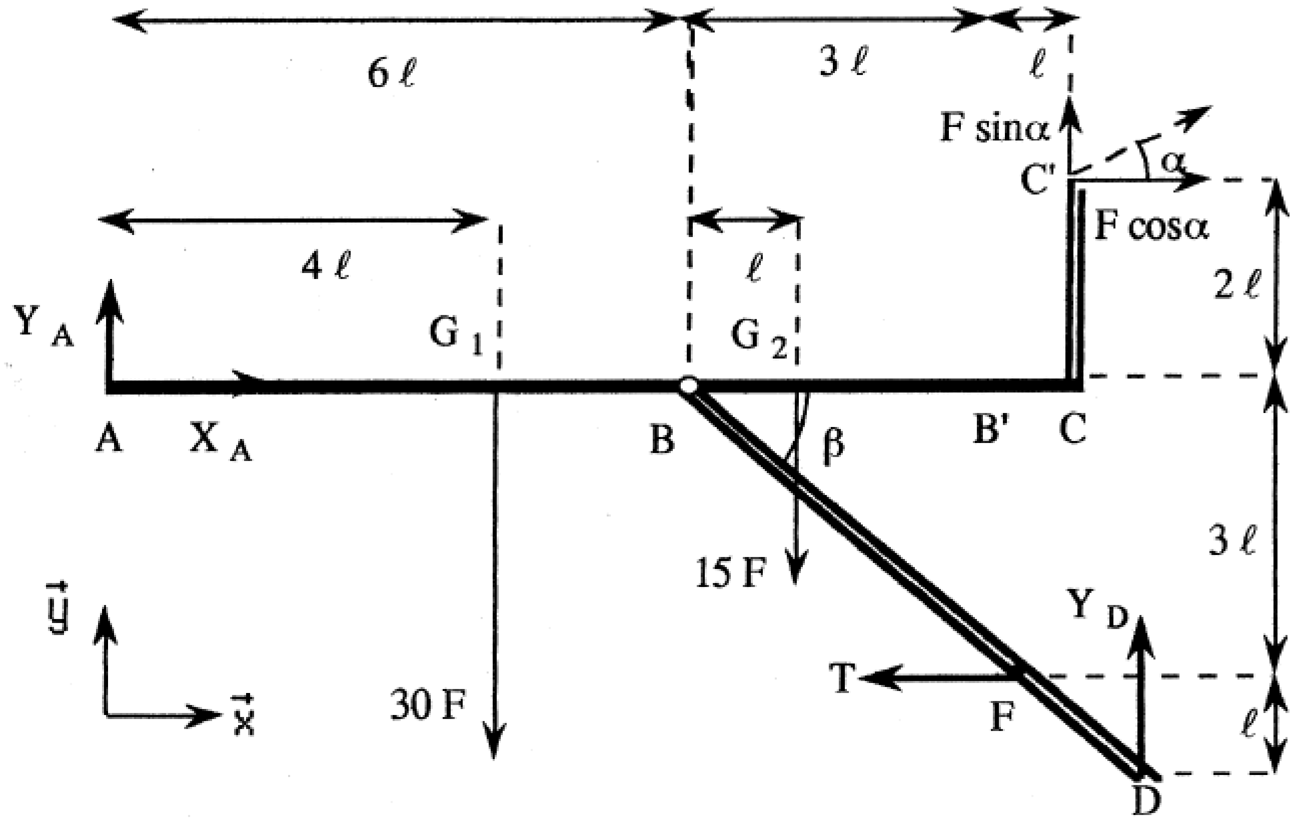
$\vec{F}_2 = -F_2 \vec{y}$ avec $F_2 = \frac{1}{2} \frac{10\,F}{\ell} 3\,\ell = 15\,F$

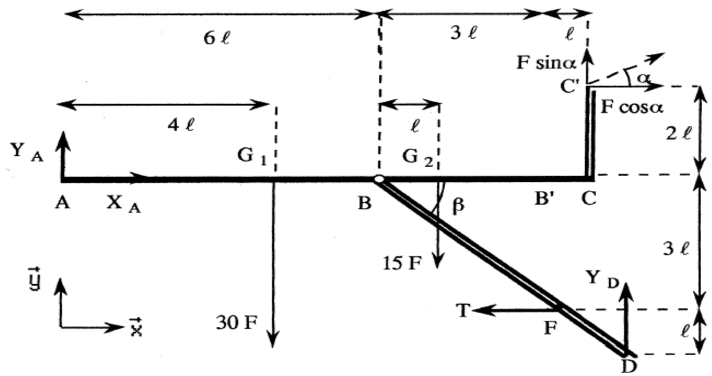
Cette force est appliquée au point G_2 tel que $BG_2 = \frac{1}{3} BB' = \ell$

En A le pivot étant parfait, l'action mécanique exercée sur AB se réduit à une force unique dans le plan de la figure . On note X_A et Y_A es composantes de cette force inconnue.

En D le pivot étant parfait, l'action mécanique exercée sur BD se réduit à une force unique dans le plan de la figure . Le point D pouvant se déplacer librement dans la direction $\vec{x}$, cette force inconnue n'a qu'une composane sur $\vec{y}$ que l'on note Y_D.

Enfin le câble exerce sur BD la force de tension inconnue que l'on note : $-T\,\vec{x}$.


6 ℓ
3 ℓ
ℓ
F sinα
C'
α
F cosα
4 ℓ
ℓ
2 ℓ
Y A
G 1
G 2
A
X A
B
β
B'
C
3 ℓ
15 F
y
Y D
T
F
x
30 F
ℓ
D



R 2 Il y a 4 inconnues X_A, Y_A, Y_D et T

En appliquant le théorème fondamental de la statique à l'ensemble on obtiendra 3 équations scalaires.

Le TRS appliqué à l'ensemble fournit les deux équations scalaires :

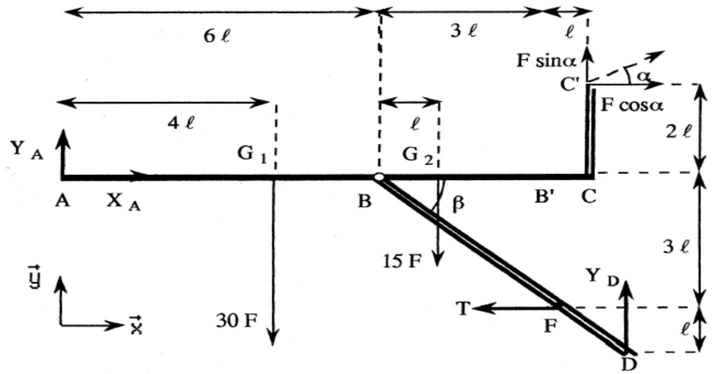
X_A - T + F cosα = 0 (1)

$Y_A + Y_D$ - 45 F + F sinα = 0 (2)

Le TMS en A appliqué à l'ansemble fournit l'équation scalaire :

$$-4\,\ell\,(30F)\ -7\,\ell\,(15F)\ +10\,\ell\,F\sin\alpha\ \ -2\,\ell\,F\cos\alpha$$

$$+(6\,\ell+\frac{4\,\ell}{\tan\beta})\,Y_D\ -3\,\ell\,T=0 \quad (3)$$



3 équations scalaires, 4 inconnues

Il faudra donc une équation scalaire supplémentaire.

Il faudra donc isoler un solide du système et lui appliquer le théorème fondamental

Le TMS appliqué à BD au point B pour ne pas introduire de nouvelles inconnues s'écrit :

$$\frac{4\,\ell}{\tan\beta}\,Y_D - 3\,\ell\,T = 0 \quad (4)$$

Résolvons ce système d'équations.

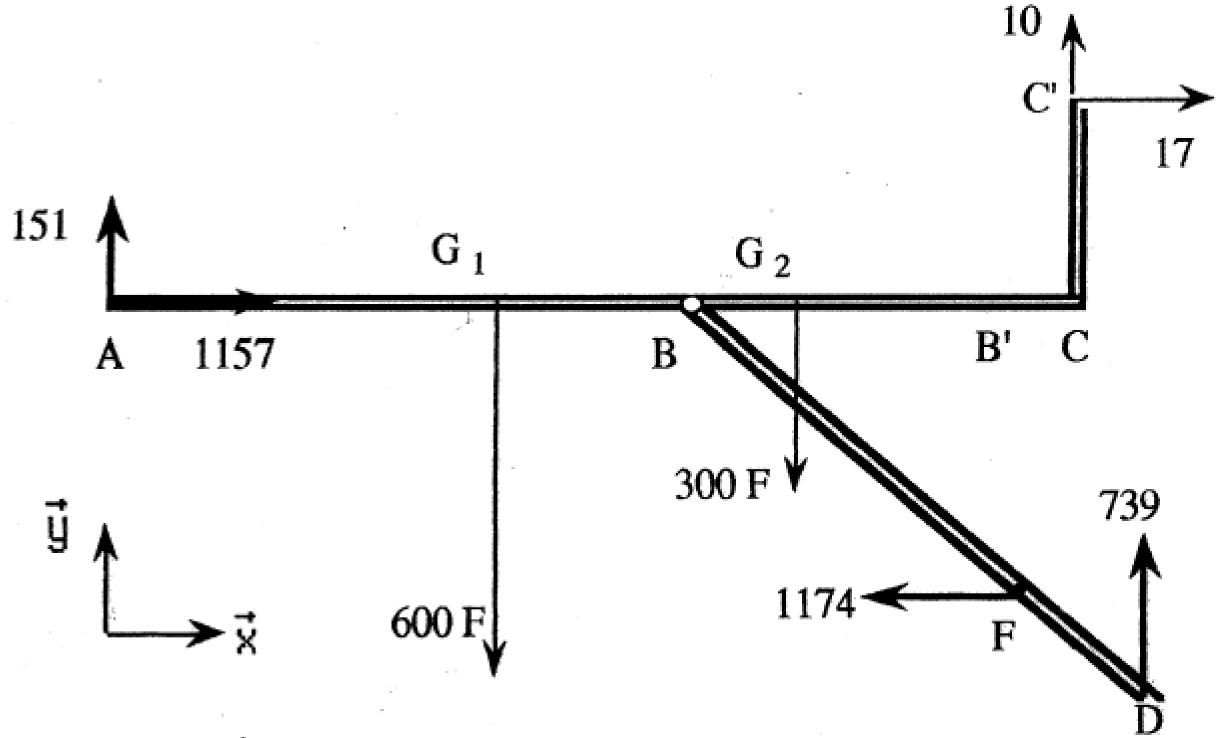
$$\boxed{Y_D = \frac{1}{6}\left(225 - 10\sin\alpha + 2\cos\alpha\right)F}$$

$$X_A = T - F\cos\alpha$$

$$Y_A = -Y_D + (45 - \sin\alpha)F$$

$$\boxed{T = \frac{2}{9\tan\beta}\left(225 - 10\sin\alpha + 2\cos\alpha\right)F}$$

R3 $X_A = 1157$ N , $Y_A = 151$ N, $Y_D = 739$ N , $T = 1174$ N



On vérifie que: sur $\vec{x}$ on a bien $1157 + 17 - 1174 = 0$

sur $\vec{y}$ $151 + 10 + 739 - 900 = 0$

Fin du Cours de
STATIQUE